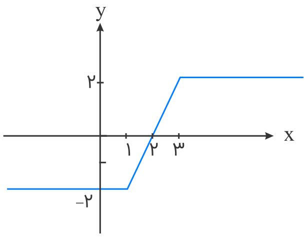
ریاضی

۱ گزینه ۴

بازه‌ای که f اکیداً یکنوا است، $۱ \leq x \leq ۳$ است.



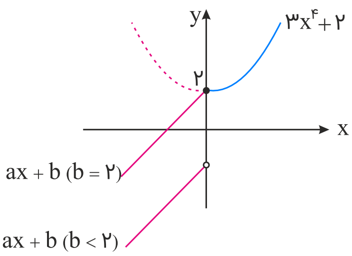
ضابطهٔ f در این بازه به‌صورت $y = x - ۱ + x - ۳ = ۲x - ۴$ است.

$$x = \frac{y+۴}{۲} \Rightarrow y = \frac{x+۴}{۲} \Rightarrow y = \frac{x}{۲} + ۲ = f^{-۱}(x)$$

می‌دانیم برد f در این بازه دامنهٔ $f^{-۱}$ است.
در این بازه برد f به‌صورت $D_{f^{-۱}} = R_f = [-۲, ۲]$ است؛ پس گزینهٔ ۴ درست است.

۲ گزینه ۱

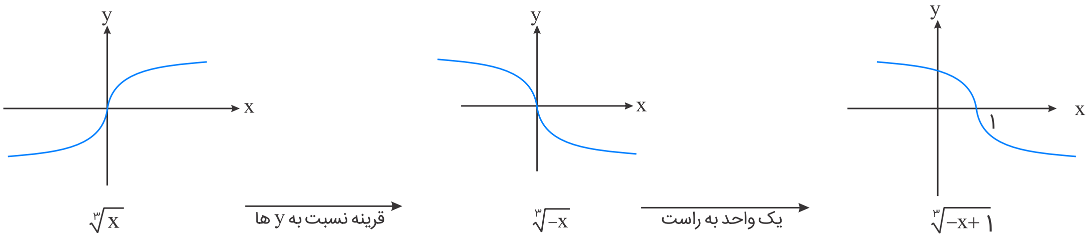
باتوجه‌به نمودار تابع $۳x^۴ + ۲$، به راحتی نتیجه می‌گیریم که این تابع در فاصلهٔ $x \geq ۰$، اکیداً صعودی است، پس برای اینکه تابع f یک‌به‌یک باشد باید شیب خط ضابطهٔ دوم قطعاً مثبت باشد، پس نتیجه می‌گیریم که $a > ۰$ است. حال کافی است b را طوری در نظر بگیریم که بُردهای این دو ضابطه، اشتراکی نداشته باشند. داریم:



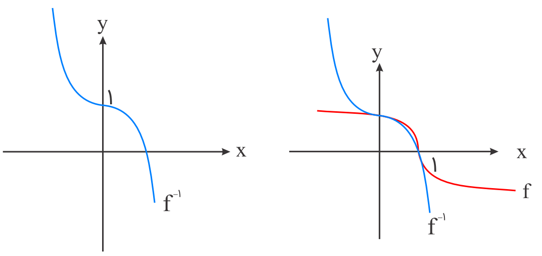
$$f(x) = \begin{cases} ۳x^۴ + ۲ & ; x \geq ۰ \Rightarrow R_۱ = [۲, +\infty) \\ ax + b & ; x < ۰ \xrightarrow{a>۰} R_۲ = (-\infty, b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_۱ \cap R_۲ = \varnothing \Rightarrow b \leq ۲$$

۳ گزینه ۴



$$y=\sqrt[۳]{-x+۱}\xrightarrow{\text{به توان ۳}}y^{۳}=-x+۱\Rightarrow x=-y^{۳}+۱$$
$$y=-x^{۳}+۱=f^{-۱}(x)$$



طبق شکل می‌بینیم یک نقطهٔ برخورد f و $f^{-۱}$، $(۰,۱)$ است.

$$A(۰,۱)\in f(x)=\sqrt[۳]{-x+۱}$$
$$A(۰,۱)\in f^{-۱}(x)=-x^{۳}+۱$$

۴ گزینه ۳

$$-۲\le x<۱\Rightarrow -۴\le ۲x<۲\Rightarrow -۳\le ۲x+۱<۳$$

پس دامنهٔ $f(x)$ برابر $[-۳,۳)$ است. حالا دامنهٔ $f(\sqrt{x})$ را می‌خواهیم.

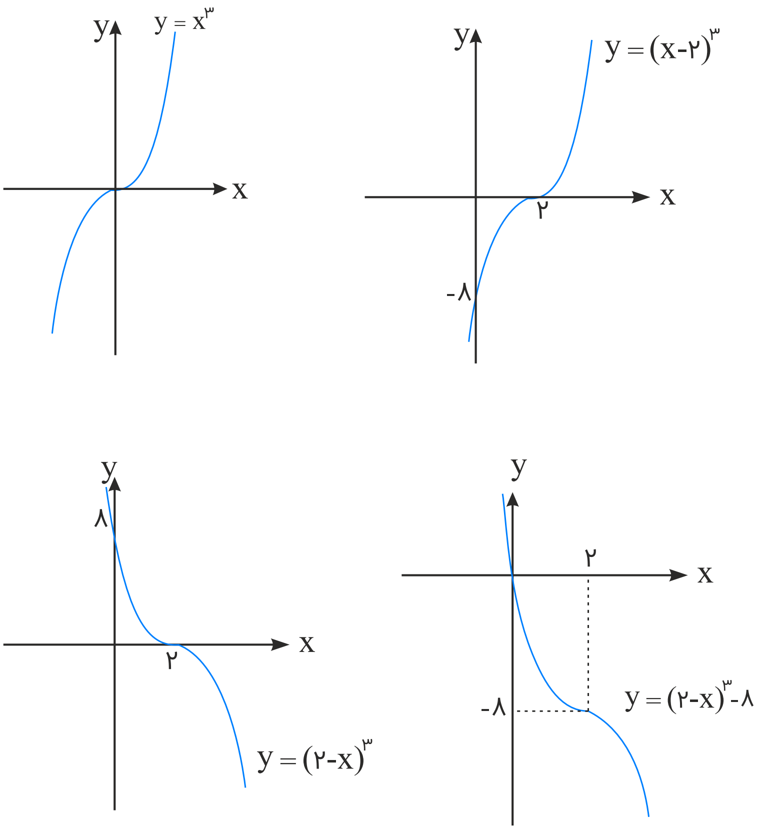
$$-۳\le\sqrt{x}<۳\Rightarrow ۰\le\sqrt{x}<۳\Rightarrow ۰\le x<۹$$

۵

گزینه ۱

$$f(x) = \underbrace{۶x^{۲} - x^{۳} - ۱۲x + ۸}_{(۲-x)^{۳}} - ۸ = (۲ - x)^{۳} - ۸$$

حال با انتقال نمودار $y = x^{۳}$ نمودار تابع موردنظر را رسم می‌کنیم. مراحل به‌صورت زیر انجام می‌شود:



۶

گزینه ۱

$$y = \frac{۳^{x} - ۲}{۳^{x} + ۲} \Rightarrow y۳^{x} + ۲y = ۳^{x} - ۲ \Rightarrow ۲y + ۲ = ۳^{x} - y۳^{x}$$

$$\Rightarrow ۲y + ۲ = ۳^{x}(۱ - y) \Rightarrow ۳^{x} = \frac{۲y + ۲}{۱ - y} \Rightarrow \log_{۳}^{(\frac{۲y+۲}{۱-y})} = x$$

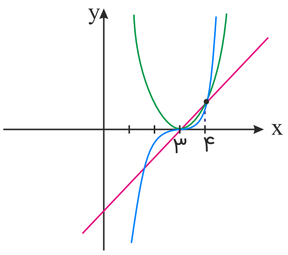
$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \log_{۳}^{(\frac{۲x+۲}{۱-x})}$$

۷

گزینه ۲

توابع $f(x)=(x+a)$، $g(x)=(x+a)^{۲}$ و $h(x)=(x+a)^{۳}$، هرکدام، یک انتقال افقی a واحدی از توابع $y=x$، $y=x^{۲}$ و $y=x^{۳}$ هستند که تنها در بازهٔ $[۰\,,\,۱]$ مقدار تابع $y=x$ از مقدار تابع $y=x^{۲}$ و مقدار تابع $y=x^{۲}$ از مقدار تابع $y=x^{۳}$ بیش‌تر است. پس از انتقال افقی a واحدی این سه تابع، تغییری در شکل و ظاهر و نحوهٔ قرارگیری آن‌ها رخ نمی‌دهد.

باتوجه‌به این‌که در بازهٔ $[۳\,,\,۴]$ داریم: $(x+a)\geq(x+a)^{۲}\geq(x+a)^{۳}$، می‌توان دریافت که هرکدام از توابع f، g و h یک انتقال سه واحدی به سمت راست از توابع اولیه‌شان هستند، بنابراین: $a=-۳$.



۸

گزینه ۲

باتوجه‌به شکل مقدار تابع در $x=a$ برابر با -۴ می‌شود؛ پس:

$$y=(a-x)^{۳}-b\xrightarrow{x=a}-b=-۴\Rightarrow b=۴\Rightarrow y=(a-x)^{۳}-۴$$

تابع در $y=۴$ محور y ها را قطع می‌کند، یعنی:

$$y(۰)=۴\Rightarrow(a)^{۳}-۴=۴\Rightarrow a^{۳}=۸\Rightarrow a=۲$$

۹

گزینه ۱

ابتدا برد تابع اصلی که همان دامنه تعریف تابع وارون است را به دست می آوریم. برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون از روی ضابطهٔ تابع اصلی x را برحسب y به دست آورده و درنهایت به جای x عبارت $f^{-۱}(x)$ و به جای y ، x را جایگذاری کرده و ضابطه را تعیین می کنیم.

$$y=۲-\sqrt{x-۱}\xrightarrow{\text{عدد زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، مثبت است}}x\geq۱$$
$$\Rightarrow x-۱\geq۰\Rightarrow\sqrt{x-۱}\geq۰\Rightarrow-\sqrt{x-۱}\leq۰$$
$$\Rightarrow ۲-\sqrt{x-۱}\leq۲\Rightarrow y\leq۲\Rightarrow R_f=(-\infty\,,\,۲]\Rightarrow D_{f^{-۱}}=(-\infty\,,\,۲]$$

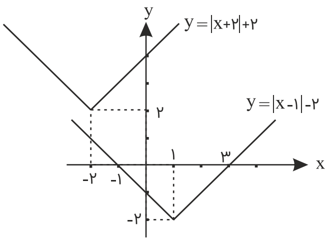
اکنون ضابطهٔ تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y=۲-\sqrt{x-۱}\Rightarrow\sqrt{x-۱}=۲-y\xrightarrow{\text{به توان ۲}}x-۱=(۲-y)^{۲}$$
$$\Rightarrow x-۱=۴-۴y+y^{۲}\Rightarrow x=۵-۴y+y^{۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=x^{۲}-۴x+۵$$

پس ضابطهٔ تابع وارون به صورت $y=x^{۲}-۴x+۵\,;\,x\leq۲$ است.

۱۰ گزینه ۴

$$f(x) = |x-۱| - ۲ \xrightarrow{\text{سه واحد انتقال به چپ}} |x+۳-۱| - ۲ = |x+۲| - ۲ \xrightarrow{\text{چهار واحد انتقال به بالا}} |x+۲| + ۲$$



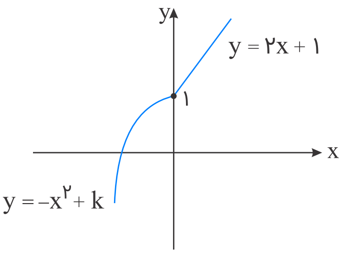
همانطور که از شکل مشخص است، این دو نمودار در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

۱۱ گزینه ۱

باتوجه‌به فرض سوال، داریم: $f^{-1}(f^{-1}(۳)) = ۰$. اگر $f^{-1}(۳) = a$، آنگاه بررسی می‌کنیم که تابع f به ازای چه مقدار a، خروجی ۳ می‌دهد. لذا داریم:

$$f(a) = ۳ \Rightarrow \begin{cases} ۲a + ۱ = ۳ \Rightarrow a = ۱ \\ -a^۲ + k = ۳ \Rightarrow a^۲ = k - ۳ \Rightarrow a = \pm\sqrt{k-۳} \end{cases}$$

اما دقت کنید که چون تابع f وارون‌پذیر است، باید یک‌به‌یک باشد. لذا باتوجه‌به نمودار تابع f می‌توان گفت که $k \leq ۱$؛ زیرا اگر $k > ۱$، آنگاه تابع f دیگر یک‌به‌یک نخواهد بود. بنابراین مقدار $\sqrt{k-۳}$ تعریف‌نشده است و $a = \pm\sqrt{k-۳}$ قابل‌قبول نیست. (چون زیر رادیکال منفی می‌شود)



پس فقط $a = ۱$ قابل‌قبول است. در ادامه داریم:

$$f^{-1}(۳) = ۱ \Rightarrow f^{-1}(۱) = ۰ \Rightarrow f(۰) = ۱$$

$$\xrightarrow{x \leq ۰} f(۰) = -(۰)^۲ + k = ۱ \Rightarrow k = ۱$$

۱۲ گزینهٔ ۱

روش اول:

$$f(x)=\frac{۱-x}{۱+x}\Rightarrow f(f(x))=\frac{۱-f(x)}{۱+f(x)}=\frac{۱-\frac{۱-x}{۱+x}}{۱+\frac{۱-x}{۱+x}}=\frac{\frac{\cancel{۱}+x-\cancel{۱}+x}{\cancel{۱+x}}}{\frac{۱+\cancel{x}+۱-\cancel{x}}{\cancel{۱+x}}}=\frac{۲x}{۲}=x$$

روش دوم: در تابع هموگرافیک $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$، اگر $a+d=۰$ باشد، داریم:

$$a+d=۰\Rightarrow f^{-۱}(x)=f(x)$$

از طرفی ترکیب هر تابع با وارونش، برابر تابع همانی است، پس داریم:

$$f^{-۱}(f(x))=x\xrightarrow{f^{-۱}(x)=f(x)}f(f(x))=x \text{ یا } f(f^{-۱}(x))=x$$

حال چون در تابع $f(x)=\dfrac{-x+۱}{x+۱}$، مقدار $a+d=۰$ است، پس بدون هیچ‌گونه محاسبه‌ای، برای تعیین ضابطهٔ تابع $fof(x)$ می‌توانیم ضابطهٔ $f(f^{-۱}(x))$ یا $f^{-۱}(f(x))$ را مشخص نماییم که برابر تابع همانی x است.

روش سوم:

مقدار ضابطهٔ $fof(x)$ را به ازای $x_۰$ دلخواهی به دست آورده و سپس این مقدار دلخواه را در تک‌تک گزینه‌ها، جایگذاری کرده و گزینه‌ای را انتخاب می‌کنیم که به ازای همان $x_۰$، همان مقدار را بدهد. داریم:

$$f(f(x))\xrightarrow{x=۱}f(f(۱))=f(۰)=۱$$

تنها گزینهٔ (۱) به ازای $x=۱$ برابر با ۱ می‌شود.

۱۳ گزینهٔ ۲

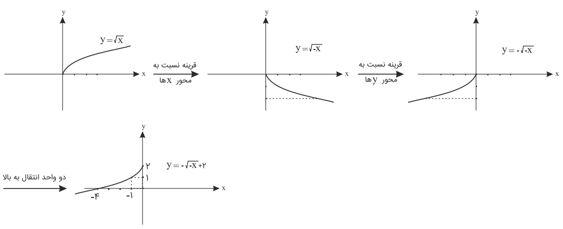
نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ هم نسبت به محور xها و هم نسبت به محور yها قرینه و ۲ واحد در راستای قائم به بالا منتقل شده است تا نمودار داده‌شده حاصل شود:

شکل

بنابراین ضابطهٔ این تابع به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور y ها}}y=\sqrt{-x}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}}y=-\sqrt{-x}$$
$$\xrightarrow{\text{دو واحد انتقال به بالا}}y=\sqrt{-x}+۲$$

$$-\sqrt{-x}+۲=c-\sqrt{ax+b}\Rightarrow a=-۱\ ,\ \ b=۰\ ,\ \ c=۲$$
$$\Rightarrow a+b+c=-۱+۰+۲=۱$$



۱۴ گزینه ۲

$$f(x)=(x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -(-x-1)^2=-(x+1)^2$$
$$\xrightarrow{\text{۴ واحد به بالا}} -(x+1)^2+4$$

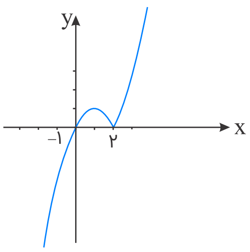
حال باید طول نقطهٔ تلاقی این دو منحنی را به دست آوریم؛ پس داریم:

$$(x-1)^2=-(x+1)^2+4 \Rightarrow x^2-2x+1=-(x^2+2x+1)+4$$
$$\Rightarrow 2x^2=2 \Rightarrow x=\pm 1$$

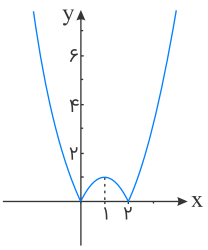
۱۵ گزینه ۲

اول نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & ; x\geq 2 \\ -x^2+2x & ; x<2 \end{cases}$$



پس برای رسم $|f(x)|$ قسمت‌هایی که زیر محورxها است، نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



مطابق شکل، نمودار تابع $|f(x)|$ در بازهٔ $[1,2]$ اکیداً نزولی است.

۱۶ گزینه ۳

$$D_{gof}=\{x\in D_f \,|\, f(x)\in D_g\}$$

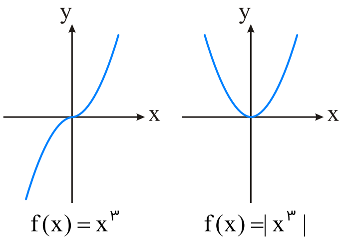
ابتدا توجه کنید که $D_f=(2,+\infty)$ و $D_g=(-\infty,2]$. اکنون باید دامنهٔ gof را تعیین کنیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \,|\, f(x)\in D_g\}=\left\{x>2 \,|\, \log_2^{(x-2)}\leq 2\right\}$$
$$=\left\{x>2 \,|\, x-2\leq 2^2\right\}=\{x>2 \,|\, x\leq 6\}=(2,6]$$

۱۷

گزینه ۳

با رسم نمودار تابع $f(x)=|x^{3}|$ به سؤال پاسخ می‌دهیم. ابتدا نمودار $y=x^{3}$ را رسم و آن قسمت از منحنی که در پایین محور xها قرار دارد را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.



با توجه به نمودار رسم‌شده، این تابع نه صعودی است و نه نزولی. این تابع یک‌به‌یک هم نیست، درنتیجه وارون‌ناپذیر می‌شود؛ بنابراین فقط گزینهٔ ۳ می‌تواند درست باشد.

۱۸

گزینه ۲

اگر نقطهٔ $A(x_{0},y_{0})$ روی تابع $y=g(x)$ قرار گیرد یعنی $g(x_{0})=y_{0}$، آنگاه نقطهٔ $A(\frac{x_{0}-1}{2},y_{0})$ روی تابع $f(x)=g(2x+1)$ قرار می‌گیرد، چون:

$$y_{0}=g(2(\frac{x_{0}-1}{2})+1)=g(x_{0})$$

چون نقطهٔ $(2,5)$ روی $g(x)$ قرار دارد، پس نقطهٔ $(\frac{2-1}{2},5)$ روی تابع $g(2x+1)$ قرار می‌گیرد، درنتیجه جواب مسئله $(\frac{1}{2},5)$ است.

۱۹

گزینه ۴

می‌دانیم $(fof^{-1})(x)=x$، $D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_{f}$، و $(f^{-1}of)(x)=x$ و $D_{f^{-1}of}=D_{f}=R_{f^{-1}}$ است، پس ضابطهٔ توابع $fof^{-1}(x)$ و $f^{-1}of(x)$ باهم برابراند. برای اینکه این دو تابع برابر باشند، باید دامنه و برد یکسانی داشته باشند پس باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که در آن $D_{f}=R_{f}$ است.

گزینهٔ۱ : $D_{f}=(0,+\infty)$ $\quad R_{f}=\mathbb{R}$

گزینهٔ۲ : $D_{f}=\mathbb{R}-\{2\}$ $\quad R_{f}=\mathbb{R}-\{1\}$

گزینهٔ۳ : $D_{f}=\mathbb{R}$ $\quad R_{f}=[0,+\infty)$

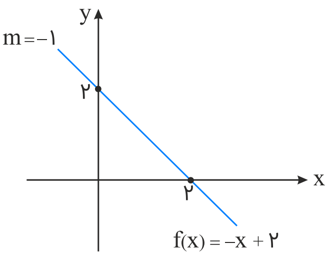
گزینهٔ۴ : $D_{f}=R_{f}=[1,+\infty)$

۲۰

گزینه ۲

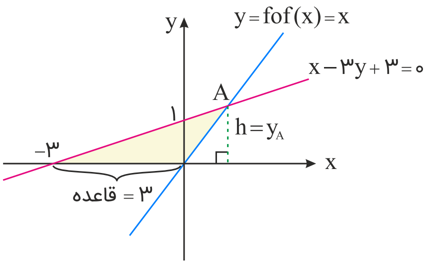
ابتدا ضابطهٔ خطی $f(x)$ را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$\xrightarrow[\text{عرض از مبدأ}=۲]{m=-۱} f(x) = -x + ۲$$



چون شیب خط $f(x)$ برابر -۱ است، پس نمودار f و $f^{-۱}$ منطبق بر هم بوده (یعنی $f(x) = f^{-۱}(x)$) و ضابطهٔ $fof(x)$، برابر با ضابطهٔ $fof^{-۱}(x)$ خواهد بود، پس داریم:

$$y = fof(x) \xrightarrow{f=f^{-۱}} fof^{-۱}(x) = x$$



حال باید مساحت بین نمودار دو تابع خطی $y = x$، $x - ۳y + ۳ = ۰$ و محور xها را با رسم شکل، مشخص نماییم. داریم:

$$\begin{cases} y = x \\ x - ۳y + ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow x_A = \frac{۳}{۲}, y_A = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{ارتفاع}} h = y_A = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲} = \frac{۳ \times \frac{۳}{۲}}{۲} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

۲۱ گزینه ۲

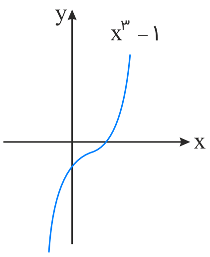
بررسی گزینه‌ها:

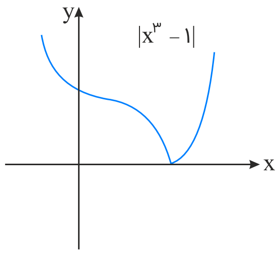
۱) تابع $y = x^{۳} - x$ در ۳ نقطه محور xها را قطع می‌کند، پس یک‌به‌یک نیست.

$$x^{۳} - x = ۰ \Rightarrow x(x-۱)(x+۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰,\ x = ۱,\ x = -۱$$

۲) توابع هموگرافیک به فرم $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad - bc \neq ۰$ یک‌به‌یک و غیرنکنوا هستند.

۳)



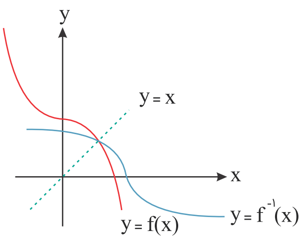


تابع $|x^{۳} - ۱|$ یک‌به‌یک نیست.

۴) تابع $y = x + \sqrt{x}$ اکیداً صعودی است، چراکه از مجموع دو تابع اکیداً صعودی $y = x$ و $y = \sqrt{x}$ تشکیل شده است.

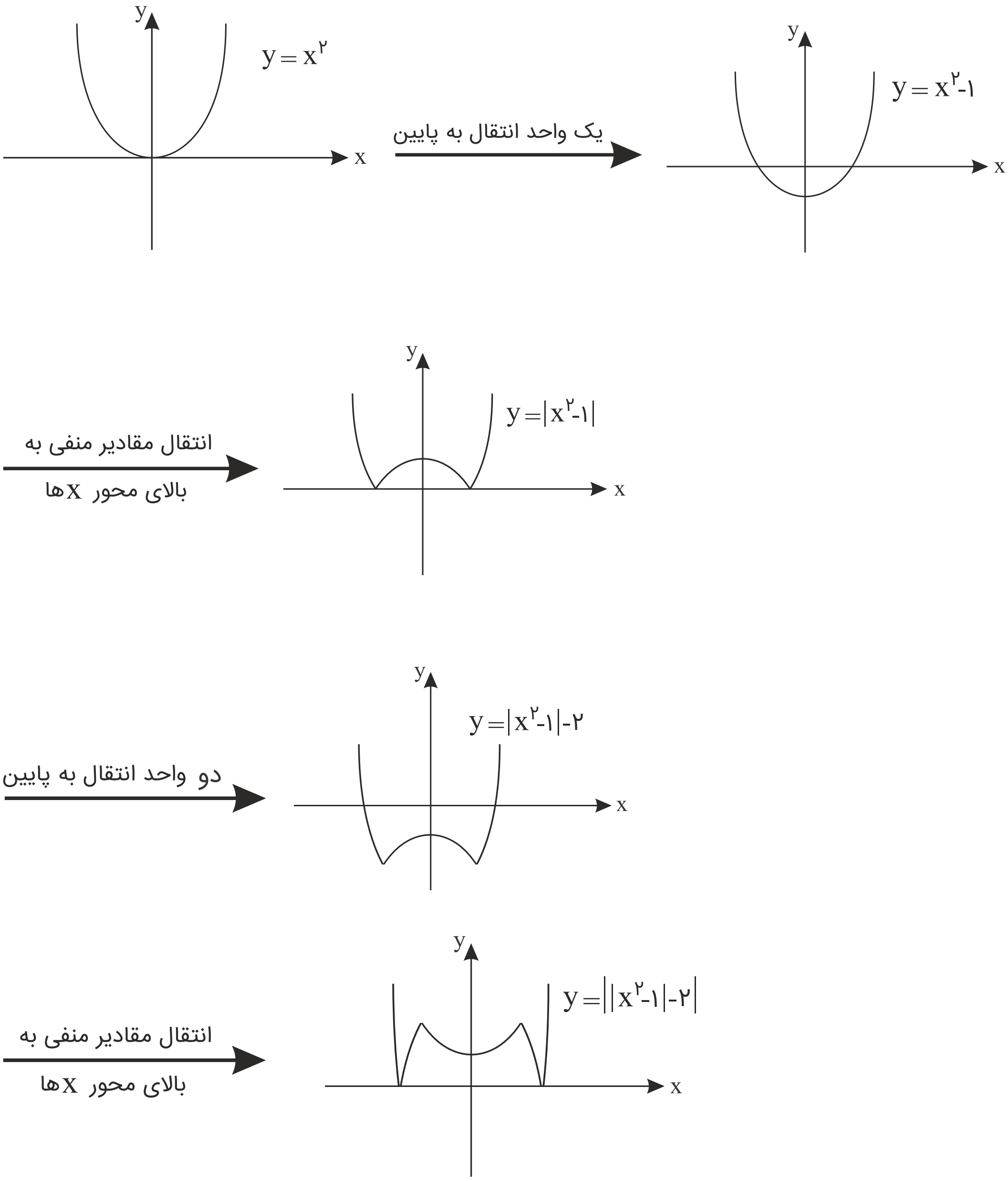
۲۲ گزینه ۳

اول باید به کمک قرینه کردن نمودار داده‌شده نسبت به خط $y = x$، نمودار $y = f(x)$ را پیدا کنیم.



از بین گزینه‌های داده‌شده فقط نمودار حاصل می‌تواند مربوط به $f(x) = ۲ - x^{۳}$ باشد.

۲۳ گزینه ۲

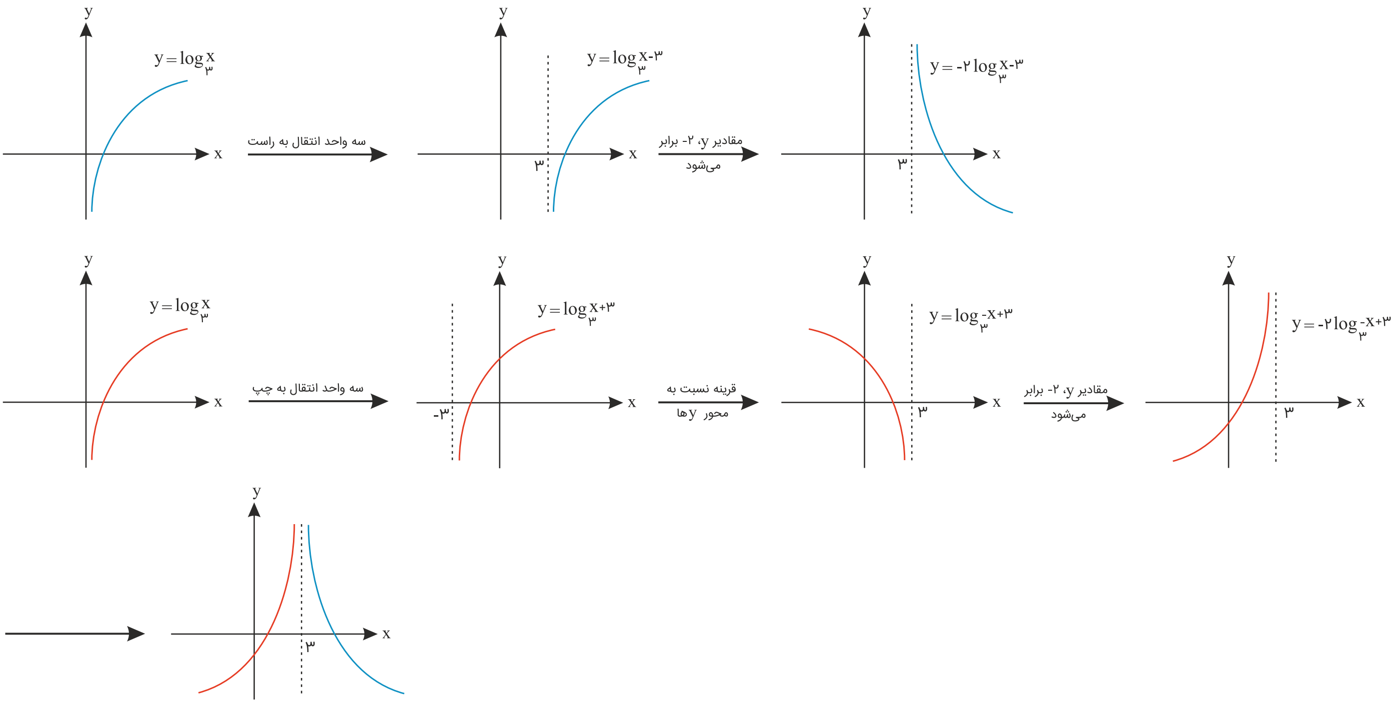


$y=x^{2}$
یک واحد انتقال به پایین
$y=x^{2}-1$
انتقال مقادیر منفی به
بالای محور xها
$y=|x^{2}-1|$
دو واحد انتقال به پایین
$y=|x^{2}-1|-2$
انتقال مقادیر منفی به
بالای محور xها
$y=\left||x^{2}-1|-2\right|$

۲۴ گزینه ۴

$$f(x) = \log_{\frac{۱}{۳}}^{x^۲-۶x+۹} = \log_{۳^{-۱}}^{(x-۳)^۲} = -۲\log_{۳}^{|x-۳|}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲\log_{۳}^{x-۳} & ; x > ۳ \\ -۲\log^{-x+۳} & ; x < ۳ \end{cases}$$



۲۵ گزینه ۴

$$\frac{x-۱}{x+۲} = ۲ \Rightarrow x-۱ = ۲x+۴ \Rightarrow x = -۵$$

چون -۵ عددی کمتر از صفر است، پس:

$$f(۲) = ۱ - ۳(-۵) = ۱۶$$

۲۶ گزینه ۳

چون ضابطهٔ دوم، یک تابع اکیداً صعودی است (تابع $x+\sqrt{x+۳}$، به‌صورت مجموع دو تابع اکیداً صعودی می‌باشد، پس اکیداً صعودی خواهد بود)، درنتیجه ضابطهٔ اول نیز، باید قطعاً اکیداً صعودی باشد، پس داریم:

$$\text{شیب خط} = a > ۰ \quad (۱)$$

از طرفی دیگر برد ضابطهٔ اول و ضابطهٔ دوم نباید اشتراک داشته باشند. برای تعیین برد توابع اکیداً صعودی، کافی است به ترتیب دامنه، برد را مشخص نماییم. داریم:

$$f(x)=\begin{cases} ax+a-۱, x\in(-\infty,۱) \Rightarrow R_۱=(-\infty,۲a-۱) \\ x+\sqrt{x+۳}, x\in[۱,+\infty) \Rightarrow R_۲=[۳,+\infty) \end{cases}$$

برای آنکه بردها اشتراکی نداشته باشند، باید مقدار $۲a-۱$، کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد. داریم:

$$R_۱\cap R_۲=\varnothing \Rightarrow ۲a-۱\leq ۳ \Rightarrow ۲a\leq ۴ \Rightarrow a\leq ۲ \quad (۲)$$
$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} ۰<a\leq ۲ \xrightarrow{a\in\mathbb{Z}} a=\{۱,۲\}$$

پس مجموعهٔ مقادیر a، شامل ۲ عدد صحیح خواهد بود.

۲۷ گزینه ۲

$$(\frac{۱}{۸})^{۲a-۲}=(۲^۴)^{-a+۴} \Rightarrow (۲^{-۳})^{۲a-۲}=(۲^۴)^{-a+۴} \Rightarrow ۲^{-۶a+۶}=۲^{-۴a+۱۶}$$
$$\Rightarrow -۶a+۶=-۴a+۱۶ \Rightarrow a=-۵$$

تابع $y=۲\times(-\frac{۱}{a})^{۲x}=۲\times(\frac{۱}{۵})^{۲x}$ با رفتار نمایی و اکیداً نزولی است.

۲۸

گزینه ۳

گام اول

به شکل ماشین داده‌شده خوب دقت کنید:

$$\text{ورودی} \longrightarrow ۲x - ۲ \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+۱} \longrightarrow \text{خروجی}$$

متغیر ورودی را x در نظر می‌گیریم. وارد دستگاهی می‌شود که این متغیر را دو برابر کرده و از آن دو واحد کم می‌کند. ما این دستگاه را $f(x)$ فرض می‌کنیم. دستگاه بعدی را هم $g(x)$ در نظر می‌گیریم. بنابراین شکل دستگاه را به‌صورت زیر تکمیل می‌کنیم:

$$\underbrace{\text{ورودی}}_{x} \longrightarrow \underbrace{۲x - ۲}_{f(x)} \longrightarrow \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x}+۱}}_{g(x)} \longrightarrow \underbrace{\text{خروجی}}_{g(f(x))}$$

خروجی به ازای متغیر ورودی x برابر $\frac{۴}{۳}$ شده است، یعنی $g(f(x)) = \frac{۴}{۳}$ است.

گام دوم

حالا با داشتن $f(x)$ و $g(x)$ می‌توانیم $g(f(x))$ را تعیین کرده و درنهایت مقدار x را محاسبه کنیم:

$$f(x) = ۲x - ۲ \ , \ \ g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}+۱}$$

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)}+۱} = \frac{۲x-۲}{\sqrt{۲x-۲}+۱} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۳(۲x-۲) = ۴\sqrt{۲x-۲}+۴$$

$$\xrightarrow{\sqrt{۲x-۲}=t} ۳t^۲ = ۴t + ۴ \Rightarrow ۳t^۲ - ۴t - ۴ = ۰ \Rightarrow (۳t+۲)(t-۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = ۲ \Rightarrow \sqrt{۲x-۲} = ۲ \Rightarrow ۲x - ۲ = ۴ \Rightarrow ۲x = ۶ \Rightarrow x = ۳ \\ t = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow \sqrt{۲x-۲} = -\frac{۲}{۳} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین ورودی این ماشین $x = ۳$ به دست آمد.

۲۹ گزینه ۲

$$[x] = -۱ \Rightarrow -۱ \leq x < ۰$$

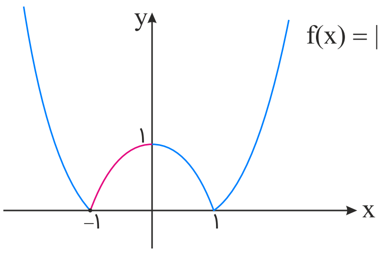
اگر $-۱ \leq x < ۰$ باشد، آنگاه $۰ < x^۲ \leq ۱$ و $-۱ < x^۲ - ۱ \leq ۰$ است؛ پس:

$$f(x) = |x^۲ - ۱| \xrightarrow{x^۲ - ۱ < ۰} f(x) = -x^۲ + ۱$$

حالا وارون تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$y = -x^۲ + ۱ \Rightarrow x^۲ = ۱ - y \Rightarrow \sqrt{x^۲} = \sqrt{۱ - y} \Rightarrow |x| = \sqrt{۱ - y}$$
$$\xrightarrow{-۱ \leq x < ۰} -x = \sqrt{۱ - y} \Rightarrow x = -\sqrt{۱ - y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = -\sqrt{۱ - x}$$

برد تابع f را هم باید پیدا کنیم. مطابق شکل زیر اگر $-۱ \leq x < ۰$ باشد، برد f برابر با $[۰, ۱)$ است.



پس ضابطهٔ وارون f برابر است با:

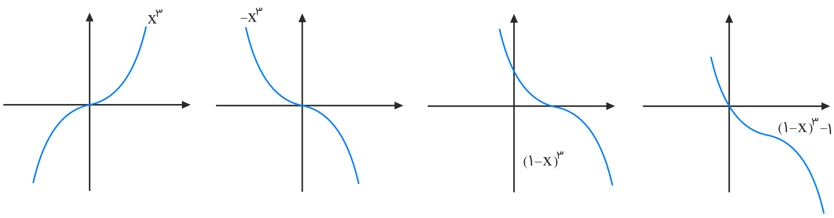
$$f^{-۱}(x) = -\sqrt{۱ - x} \quad ; ۰ \leq x < ۱$$

۳۰ گزینه ۱

$$(gof)(x) = g(f(x)) = x - [x]$$
$$f(x) = x^۳ - \sqrt{۲} = \sqrt{۲} \Rightarrow x^۳ = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = \sqrt{۲}$$
$$g\left(f\left(\sqrt{۲}\right)\right) = g\left(\sqrt{۲}\right) = \sqrt{۲} - \left[\sqrt{۲}\right] = \sqrt{۲} - ۱$$

۳۱ گزینه ۱

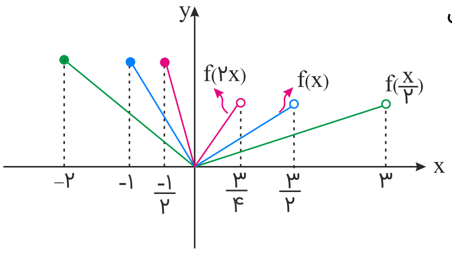
مرحله‌به‌مرحله جلو می‌رویم:



۳۲ گزینه ۳

اگر نمودار را تکمیل کنیم به شکل زیر می‌رسیم.

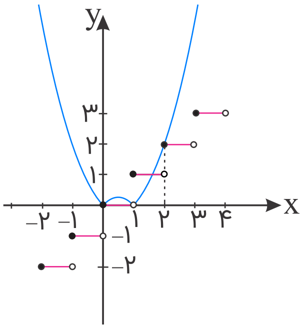
پس دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $[-۱, \frac{۳}{۲})$ است. می‌دانیم نمودار $y = f(۳x)$، ۳ برابر نسبت به $f(x)$ جمع‌تر می‌شود. پس دامنهٔ آن برابر است با: $[-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲})$



۳۳ گزینه ۳

نمودار توابع $y = |x^۲ - x|$ و $y = [x]$ را به‌دقت رسم می‌کنیم.

مطابق شکل، نمودار دو تابع در سه نقطه متقاطع هستند که طول ۲ تا از این نقاط برابر با $x = ۰$ و $x = ۲$ است.



۳۴ گزینه ۳

با داشتن ۲ نقطه معادلهٔ خط f را می‌نویسیم. g نیز از خانوادهٔ $y = \frac{k}{x}$ است که یک واحد به راست منتقل شده است و داریم:

$$(۰,۱)\ ,\ (۱,۳) \in f \Rightarrow m = \frac{۳-۱}{۱-۰} = ۲ \Rightarrow y - ۱ = ۲x \Rightarrow f(x) = ۲x + ۱$$

$$f(x) = ۲x + ۱ \Rightarrow y = ۲x + ۱ \Rightarrow x = \frac{y-۱}{۲} \Rightarrow y = \frac{x-۱}{۲} = f^{-۱}(x)$$

$$g(x) = \frac{k}{x-۱} \Rightarrow A(۰,-۱) \in g(x) = \frac{k}{x-۱} \Rightarrow -۱ = \frac{k}{-۱} \Rightarrow ۱ = k \Rightarrow g(x) = \frac{۱}{x-۱}$$

$$h(x) = g(f^{-۱}(x)) = g(\frac{x-۱}{۲}) = \frac{۱}{\frac{x-۱}{۲} - ۱} = \frac{۱}{\frac{x-۱-۲}{۲}} \Rightarrow h(x) = \frac{۲}{x-۳}$$

۳۵ گزینه ۲

قدر مطلق‌ها را با بازه‌بندی حذف می‌کنیم:

$$x < -۳ : f(x) = ۳x + (x+۳) + (۲-۴x) = ۵ \quad \text{ثابت}$$

$$-۳ \le x \le \frac{۱}{۲} : f(x) = ۳x - (x+۳) + (۲-۴x) = -۲x - ۱ \quad (\text{نزولی اکید})$$

$$x > \frac{۱}{۲} : f(x) = ۳x - (x+۳) + (-۲+۴x) = ۶x - ۵ \quad (\text{صعودی اکید})$$

پس تابع در فاصلهٔ $\left[-۳, \frac{۱}{۲}\right]$ مدنظر است. برد f در این فاصله را پیدا می‌کنیم که همان دامنه $f^{-۱}$ است:

$$-۳ \le x \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۶ \ge -۲x \ge -۱ \Rightarrow ۵ \ge -۲x - ۱ \ge -۲ \Rightarrow R_f = D_{f^{-۱}} = [-۲, ۵]$$

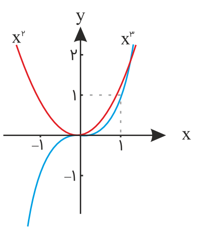
حالا ضابطهٔ تابع وارون را می‌نویسیم:

$$y = -۲x - ۱ \Rightarrow y + ۱ = -۲x \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲}y - \frac{۱}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = -\frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲}$$

پس $f^{-۱}(x) = \frac{-x-۱}{۲}$ با شرط $x \in [-۲, ۵]$ است.

۳۶ گزینه ۲

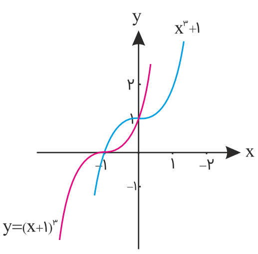
نمودار توابع $f(x) = x^۳$ و $g(x) = x^۲$ را در یک دستگاه مختصات ترسیم کرده‌ایم.



مطابق شکل در فاصلهٔ $(-\infty, ۱]$ نمودار $f(x) = x^۳$ پایین‌تر یا مساوی با $g(x) = x^۲$ است، پس بیشترین مقدار a برابر ۱ می‌شود.

۳۷ گزینه ۲

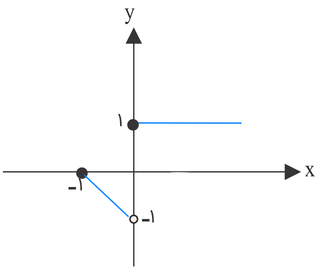
نمودار توابع $y = x^۳ + ۱$ و $y = (x+۱)^۳$ را رسم کرده‌ایم. مطابق شکل در ۲ نقطه برخورد دارند.



۳۸ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq ۰ \\ -x & ; x < ۰ \end{cases}$ خواهیم داشت:

$$y = f(x-|x|) = \begin{cases} f(۰) & ; x \geq ۰ \\ f(۲x) & ; -۲ \leq ۲x < ۰ \end{cases} = \begin{cases} ۱ & ; x \geq ۰ \\ f(۲x) & ; -۱ \leq x < ۰ \end{cases}$$



۳۹ گزینه ۲

$$۲ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ \Rightarrow D_f = (-\infty, ۲]$$
$$x^۲ - ۱۵x > ۰ \Rightarrow x(x-۱۵) > ۰ \Rightarrow D_g = (-\infty, ۰) \cup (۱۵, +\infty)$$
$$D_{fog} = \{x | x \in D_g , g(x) \in D_f\}$$
$$= \left\{ x | \underbrace{x \in (-\infty, ۰) \cup (۱۵, +\infty)}_{(*)} , \log(x^۲ - ۱۵x) \leq ۲ \right\}$$
$$\log(x^۲ - ۱۵x) \leq \log_{۱۰}^{۱۰۰} \Rightarrow x^۲ - ۱۵x \leq ۱۰۰ \Rightarrow x^۲ - ۱۵x - ۱۰۰ \leq ۰$$
$$\Rightarrow (x-۲۰)(x+۵) \leq ۰ \Rightarrow x \in [-۵, ۲۰] \; (**)$$

باید از (*) و (**) اشتراک گرفت؛ بنابراین مجموعهٔ جواب برابر است با:

$$\xrightarrow{(**),(*)} x \in [-۵, ۰) \cup (۱۵, ۲۰]$$

۴۰ گزینه ۴

$$g^{-۱} = \{(۳, ۲), (۲, ۴), (۶, ۵), (۱, ۳)\}$$
$$f = \{(۱, ۲), (۲, ۵), (۳, ۴), (۴, ۶)\}$$

حال $g^{-۱}of$ را حساب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} ۱ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g^{-۱}} ۴ \\ ۲ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{g^{-۱}} \times \\ ۳ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g^{-۱}} \times \\ ۴ \xrightarrow{f} ۶ \xrightarrow{g^{-۱}} ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow g^{-۱}of = \{(۱, ۴), (۴, ۵)\}$$

فرض می‌کنیم که $h = g^{-۱}of$ باشد. خواستهٔ مسئله $h - f$ است که باید در دامنهٔ مشترک، عرض‌ها را از هم کم کنیم.

$$D_{h-f} = D_h \cap D_f = \{۱, ۴\}$$
$$h - f = \{(۱, ۴ - ۲), (۴, ۵ - ۶)\} = \{(۱, ۲), (۴, -۱)\}$$

پس برد تابع $h - f$ برابر $\{۲, -۱\}$ است.